

GERİLİM ANALİZİ

Her biri matematiksel teoriler olan elastisite, viskozite veya plastisite teorileri kendi içlerinde bir düzene sahip olup kuvvet, gerilim, deformasyon ve birim deformasyon davranışları gibi parametreler tarafından kontrol edilmektedirler.

Bu bölümde, çeşitli fiziksel tanımlamalar ve matematiksel ilişkiler yoluyla formülize edilmiş, cisim kuvveti, yüzey kuvveti, normal ve makaslama gerilimi gibi kavramlarından bahsedilecektir.

CİSİM KUVVETİ: cisim boyunca etki eder ve başka bir cisimle teması olmaksızın üretilir (yerçekimsel, manyetik, eylemsizlik kuvveti gibi).

YÜZEY KUVVETİ: bir cismin dış yüzeyi boyunca etki eder ve başka bir cisimle teması sonucu oluşur.

Bir cisim kuvvetinin yoğunluğu birim hacme düşen kuvvet olarak tanımlanır. Eğer ΔV hacmindeki bir cisme etkiyen kuvvet bileşkeleri , ΔF_x , ΔF_y ve ΔF_z ise

$$x = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta V}$$

$$y = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta V}$$

$$z = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta V}$$

Gerilim $\longrightarrow$ Birim alana düşen kuvvet.

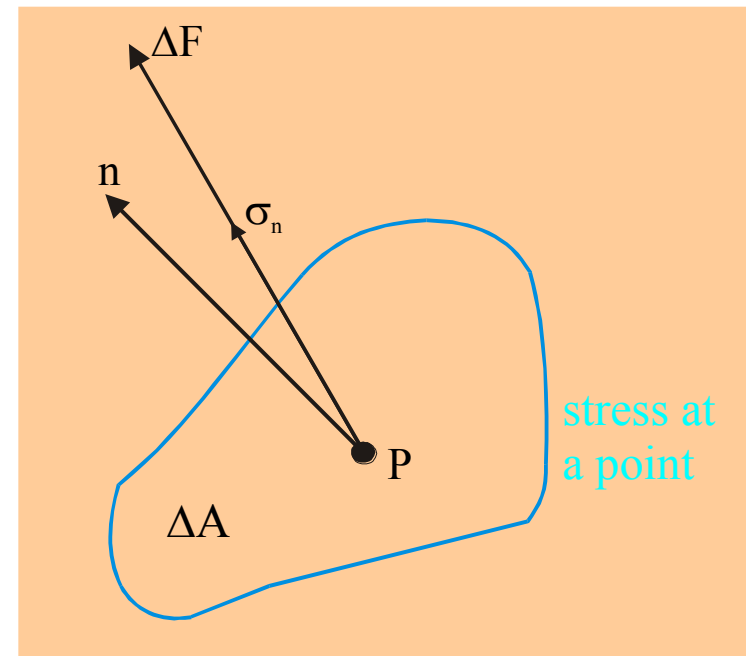
$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

Koordinat sisteminde, ΔF :

$$\sigma_{nx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$

$$\sigma_{ny} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$$

$$\sigma_{nz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$



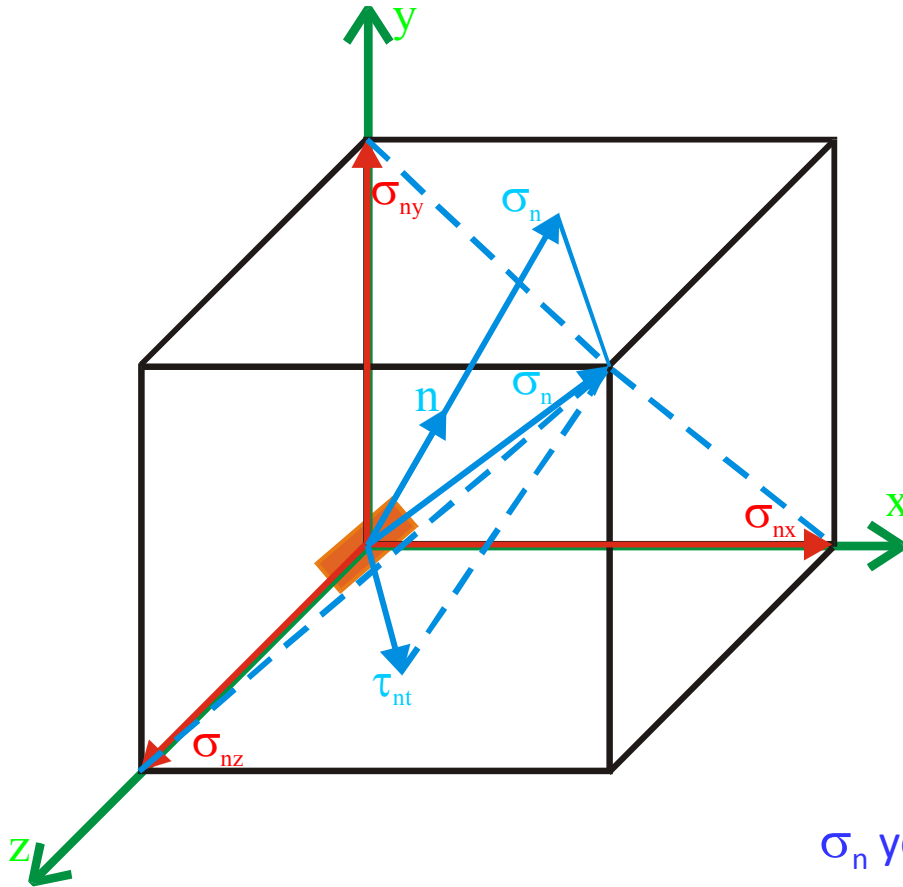
$\Delta F \longrightarrow$ P noktasını çevreleyen ΔA alanına etkiyen bileşke kuvvet

σ alt indisleri $\begin{cases} n: \text{alana normal (dik) yönde} \\ z: \text{gerilim yönünde} \end{cases}$

Gerilim $\longrightarrow$ Tensör nicelik (düzlem, büyüklük, yön)

Kuvvet $\longrightarrow$ Vektörel nicelik (büyüklük, yön)

BİR YÜZEYE ETKİYEN GERİLİM BİLEŞENLERİ



Yandaki şekilden;

$$\sigma_n^2 = \sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2$$

$$\sigma_{nx} = \sigma_n \times \cos(\sigma_n, x)$$

$$\sigma_{ny} = \sigma_n \times \cos(\sigma_n, y)$$

$$\sigma_{nz} = \sigma_n \times \underbrace{\cos(\sigma_n, z)}$$

σ_n yönüyle z eksenindeki açıının kosinüsüdür.

ΔF kuvveti ayrıca iki bileşenine ayrılarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$\sigma_{nn} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}$$

t ; σ_{nn} ve σ_n tarafından oluşturulan düzlem ile ΔA alanının teğet düzlemi arasındaki kesişimin yönü

$$\tau_{nt} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A}$$

Gerilim uygulanan alana dik ise $\longrightarrow$ NORMAL GERİLİM

Gerilim uygulanan alana paralel ise $\longrightarrow$ MAKASLAMA GERİLİMİ

$$\sigma^2 = \sigma_{nn}^2 + \tau_{nt}^2$$

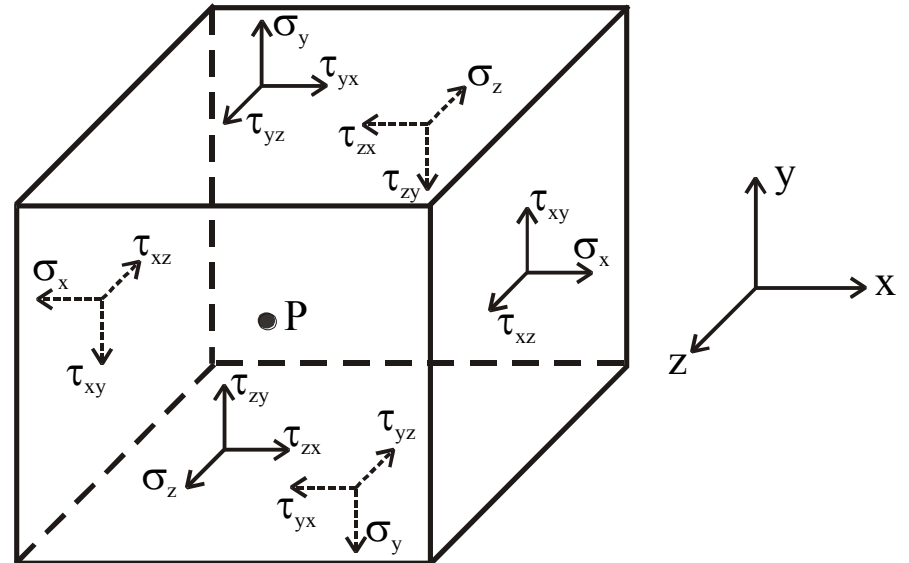
$$\sigma_{nn} = \sigma_n \times \cos(\sigma_n, n)$$

$$\tau_{nt} = \sigma_n \times \cos(\sigma_n, t)$$

Toplamda 9 adet gerilim bileşeni vardır:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$

DİKDÖRTGEN KOORDİNATTA GERİLİM BİLEŞENLERİ



Denge durumunda;

$$\sum M_x = \frac{\tau_{yz} \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{2} + \frac{\tau_{yz} \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{2} - \frac{\tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{2} - \frac{\tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{2} = 0$$

Yine de;

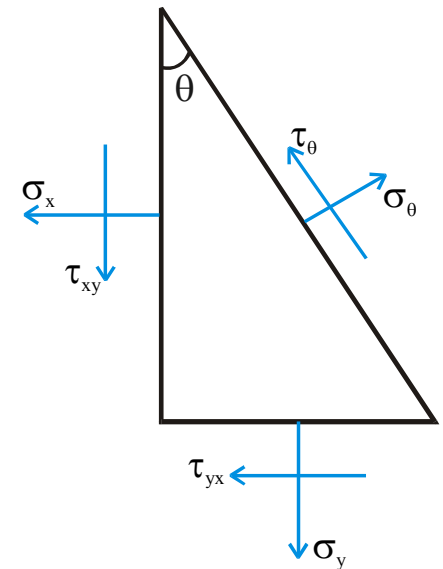
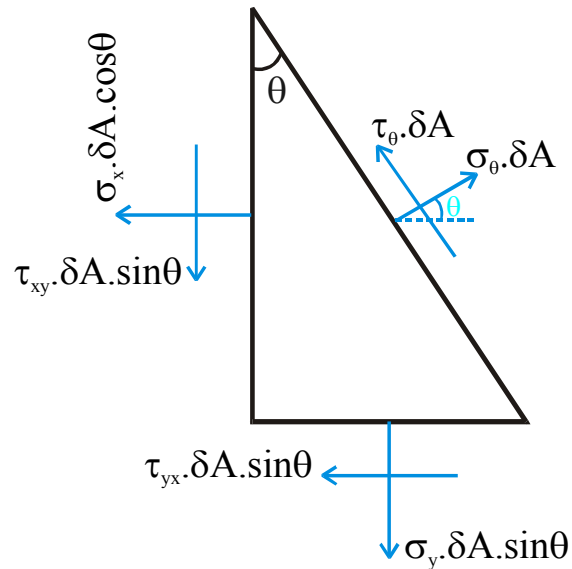
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Bir Düzlemdeki Gerilim

Bir düzlemdeki gerilim diyagramı:



σ_θ yönündeki kuvvetin toplamı:

$$\sum F_{\sigma_\theta} = \sigma_\theta \delta A - \sigma_x \delta A \cos^2 \theta - \sigma_y \delta A \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \delta A \cos \theta \sin \theta = 0$$

τ_{xy} yönündeki kuvvetin toplamı:

$$\sum F_{\tau_\theta} = \tau_\theta \delta A + \tau_{xy} \delta A \sin^2 \theta - \tau_{xy} \cos^2 \theta + \sigma_x \delta A \sin \theta \cos \theta - \sigma_y \delta A \sin \theta \cos \theta = 0$$

Sadeleştirme sonucunda:

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau_\theta = \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta$$



$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta$$

Normal gerilimin σ_θ eşitliğinin türevi:

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta_1 + 2\tau_{xy} \cos 2\theta_1 = 0$$

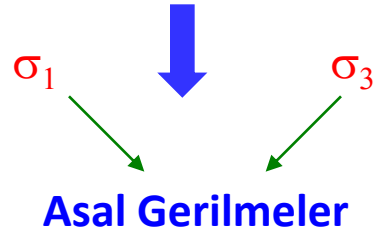
$$\theta_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

θ_1 için iki farklı değeri olasıdır:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_3 = \sigma_{\min} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Maksimum ve Minimum Normal Gerilim



Asal Düzlemler

Maksimum ve Minimum Normal Gerilim

Maksimum ve Minimum Normal Gerilim (τ_θ) eşitliğinin türevi alınır :

$$\frac{d\tau_\theta}{d\theta} = -2\tau_{xy} \sin 2\theta_2 - (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta_2 = 0$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}}$$

θ_2 ve $\theta_2 + 90$ için:

$$\tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta+90} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

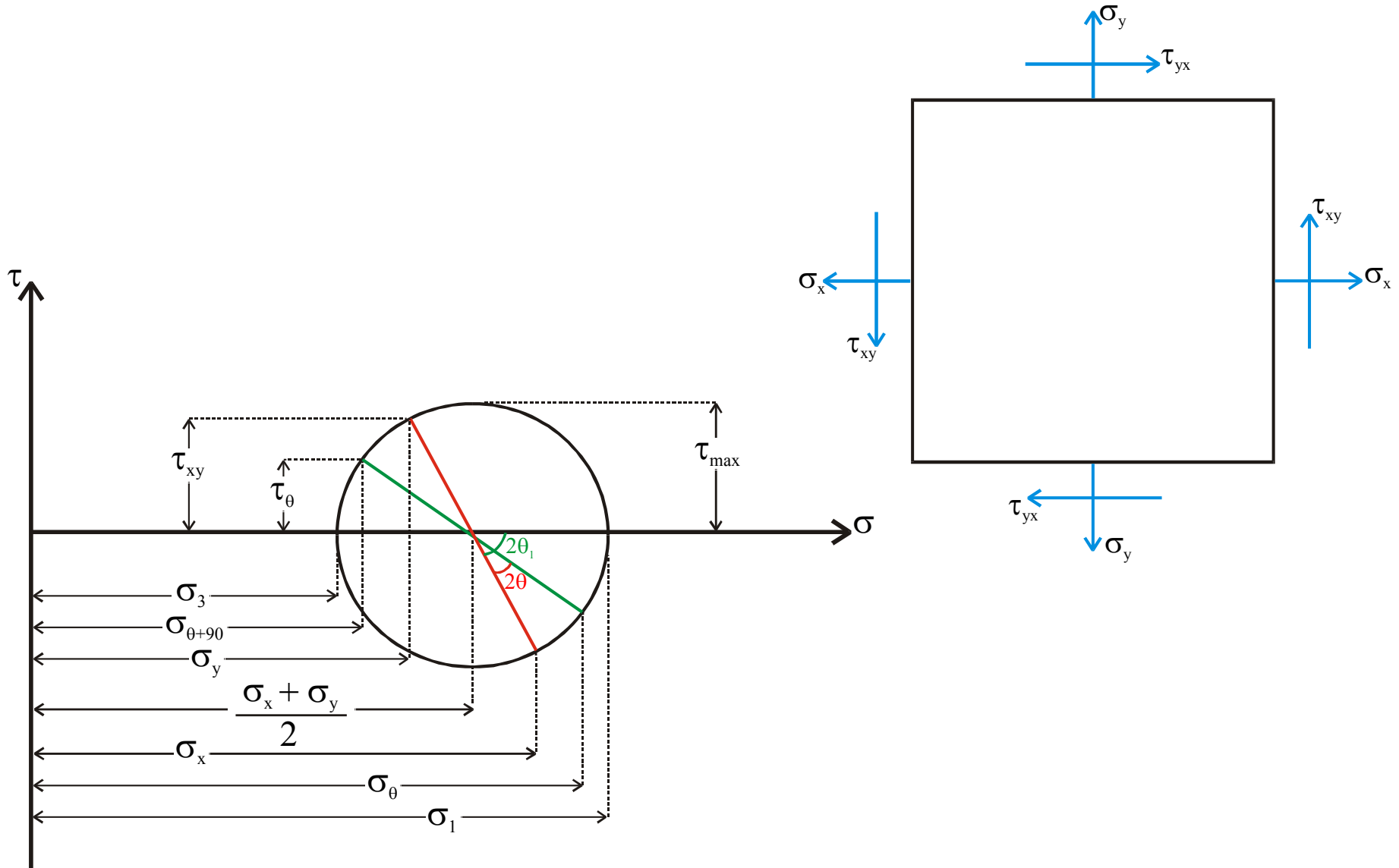
Makaslama düzlemi ile asal düzlemler arasındaki açının 45° olması koşulunda maksimum makaslama gerilmesi oluşur.

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta$$

MOHR DAİRESİ

Mohr dairesi her yöndeki gerilimler için geometrik bir çözümdür.



Mohr dairesi çizilirken aşağıdaki adımlar izlenir;

- 1) Ortogonal eksenler çizilerek dikey eksen τ (makaslama gerilmesi) ve yatay eksen de σ (normal gerilme) olarak isimlendirilir. Bu iki eksenin eşit şekilde ölçeklendirilmesi önemlidir.
 - 2) Normal gerilme eksenine σ_x ve σ_y ler eklenir
 - 3) Cismin üzerine saat yönünde aşağı doğru etkiyen makaslama gerilmesi ya da normal eksen üzerinde bir noktaya dik etki eden normal gerilme işaretlenir
 - 4) Dikey eksendeki makaslama gerilim değerleri normal gerilim eksenini üzerinde $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ noktalarıyla kesiştirilir ve kesişen bu noktalar bir doğru ile birleştirilir.
 - 5) Normal gerilim eksenini üzerinde $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ noktası merkez olacak şekilde bir daire çizilir ve makaslama ile normal gerilimlerin kesişim noktalarını birleştiren doğru be çemberin çapını ifade eder
- ✓ bu çemberin yarı çapının makaslama düzlemini kestiği nokta maksimum makaslama gerilimidir

$$r = \tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

✓ daire ile normal gerilim ekseninin kesişimi asal gerilmeleri verir.

✓ 2θ : x eksenini ve asal gerilimlerin arasındaki açının iki katı $\longrightarrow 2\theta: 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$

✓ Mohr Dairesinin merkezi:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_\theta + \sigma_{\theta+90}}{2}$$

OKTAHEDRAL GERİLİMLER

$\sigma_{n_{oct}}$, $\tau_{n_{oct}}$ plastik akma için yenilme kriterinde önemli bir rol oynar.

oktahedron (sekizyüzlü) yüzeylerinin normalleri aşağıdaki doğrultu kosinüslerine sahiptir.

$$\cos(n, x) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos(n, y) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos(n, z) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Oktahedral gerilim için bileşke denklemleri:

$$\sigma_{n_{oct}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\tau_{n_{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

İKİNCİL ASAL GERİLİMLER

İkincil asal gerilme kavramı foto-elastisite ve deneysel gerilim analizlerinde yarar sağlar.

✓ ikincil asal gerilmeler aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\left(\sigma_1', \sigma_3' \right)_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

✓ yeni xy ekseninin yönelimi ise:

$$(\theta')_z = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Burada dikkat edilmesi gereken unsur sadece bir set asal gerilme olup, ikincil asal gerilmelerin ise sonsuz sayıda olduğudur. Ancak her bir i yönü için tek set ikincil asal gerilme vardır.

BİRİM DEFORMASYON ANALİZİ

✓ **Deformasyon:** Bir cisimde yer değiştirmeden kaynaklı meydana gelen şekil ve büyüklük değişimidir.

Rijit kütle hareketi ile sonuçlanan bir yer değiştirme ile deformasyon ile sonuçlanan bir yer değiştirmeyi ayırt etmek burada önem taşır.

- rijit kütle hareketinde $\Rightarrow$ büyüklük & şekil $\Rightarrow$ değişmez
referans noktası $\Rightarrow$ değişir

İKİ ÇEŞİT DEFORMASYON



Çizgisel deformasyon

Açısal Deformasyon

✓ **Birim Deformasyon:** cismin orijinal boyundaki birim başına değişimdir.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\delta L}{\delta L}$$

Boydaki değişim

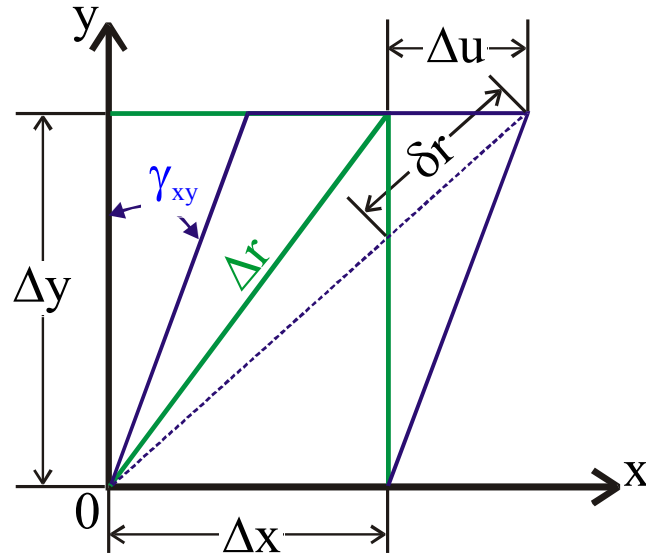
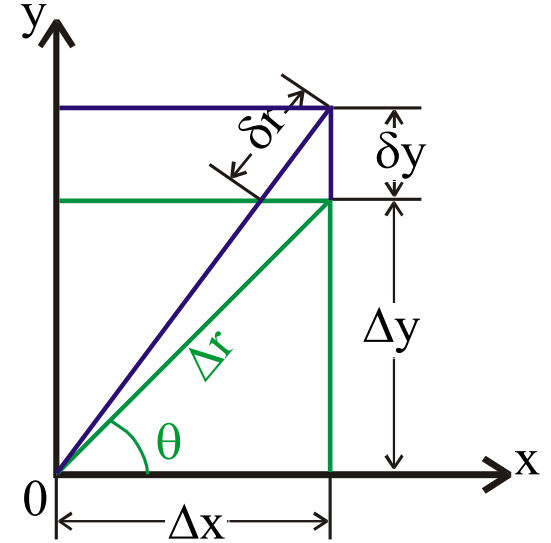
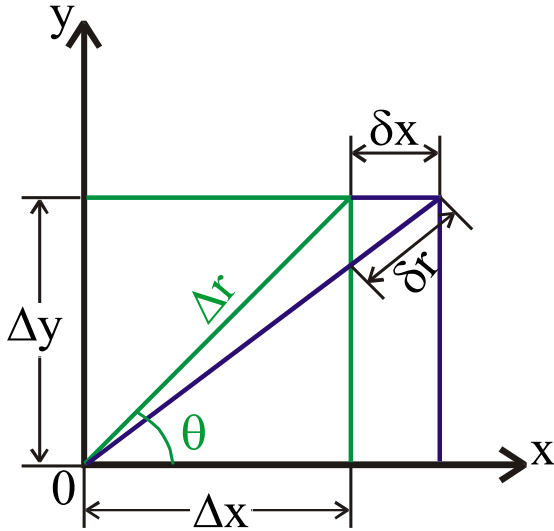
Cismin boyu

Birim deformasyon

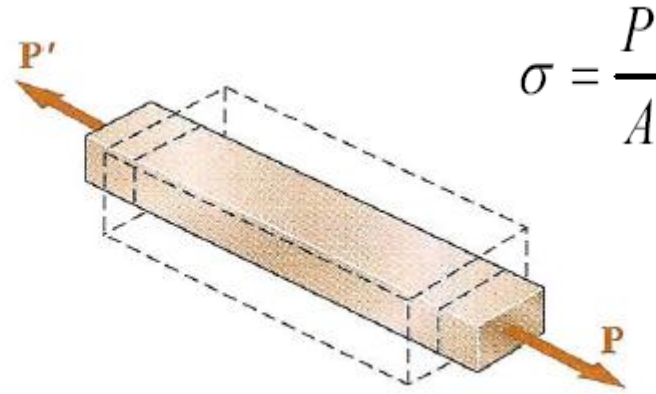
✓ **Makaslama Deformasyonu :** açısal bir deformasyondur

BİR DÜZLEMDEKİ BİRİM DEFORMASYON

Elastisite teorisindeki çoğu problem bir düzlemdeki birim deformasyon anlayışıyla çözümlenebilir.



$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_a}$$



$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

Birim deformasyonun altı bileşeni:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

ELASTİSİTE TEORİSİ

Klasik elastisite teorisinde katı maddelerin aşağıdaki ideal elastik özellikleri gösterdikleri düşünülerek hareket edilir.

- ✓ Gerilim ve birim deformasyon arasındaki doğrusallık: **Hooke yasasına** göre bir cisme bir birim gerilim uygulandığında bir birim deformasyon meydana gelir.
- ✓ Homojenlik: bir cismin her noktasındaki elastik özelliği ve tüm hacmi boyunca madde özelliğinin aynı olması.
- ✓ İzotropi: maddenin tüm yönlerde elastik özelliğinin aynı olması.
- ✓ Mükemmel elastisite: etki eden gerilimler ortadan kalktığında cismin tekrar ilk haline dönmesi durumu.

HİÇ BİR MADDE BU KOŞULLARI TAM OLARAK SAĞLAMAZ.

Yine de uygulamada çoğu yapısal malzeme ve kaya için bu elastik özellikler göz önünde bulundurulur.

Gerilim- Birim Deformasyon İlişkisi:

Gerilim bileşenleri ve bunların sonucunda meydana gelen birim deformasyon ilişkisi Hooke yasasıyla ifade edilir.

$$\varepsilon_x \sim \sigma_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

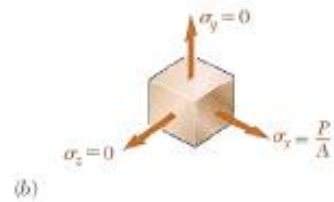
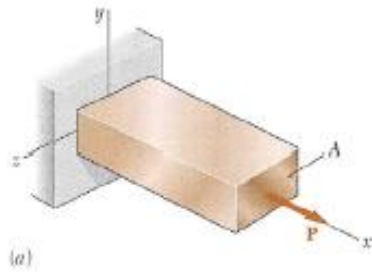
Elastisite modülü

Cisimde x yönünde uzamaya y ve z yönlerinde kısalma eşlik eder.

$$\varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

Poisson oranı

$$\varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$



$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E}$$

Üç boyutta ortaya çıkan normal birim deformasyonlar:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

E&G arasındaki ilişki:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Rijidite modülü

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$e = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} \bullet p = \frac{P}{K}$$

($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ hidrostatik gerilim alanı için)

Bulk modülü

Hacimsel birim deformasyon

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

Bu altı adet gerilim-birim deformasyon ilişkisi gerilimleri ifade etmek için deformasyon cinsinden yeniden yazılırsa:

$$\sigma_x = \frac{\mu \bullet E}{(1 + \mu) \bullet (1 - 2\mu)} \bullet e + \frac{E}{1 + \mu} \bullet \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \frac{\mu \bullet E}{(1 + \mu) \bullet (1 - 2\mu)} \bullet e + \frac{E}{1 + \mu} \bullet \varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \frac{\mu \bullet E}{(1 + \mu) \bullet (1 - 2\mu)} \bullet e + \frac{E}{1 + \mu} \bullet \varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \bullet \gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \bullet \gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \bullet \gamma_{zx}$$

Lame Sabiti:

$$\lambda = \frac{\mu \bullet E}{(1 + \mu) \bullet (1 - 2\mu)}$$

$$\sigma_x = \lambda \bullet e + 2 \bullet G \bullet \varepsilon_x$$

$$\tau_{xy} = G \bullet \gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \lambda \bullet e + 2 \bullet G \bullet \varepsilon_y$$

$$\tau_{yx} = G \bullet \gamma_{yx}$$

$$\sigma_z = \lambda \bullet e + 2 \bullet G \bullet \varepsilon_z$$

$$\tau_{zx} = G \bullet \gamma_{zx}$$

Düzlemsel Gerilim Koşulları:

Düzlemsel gerilim koşulu, z yönündeki gerilimlerin ihmal edildiği koşul; σ_z , τ_{xz} ve $\tau_{yz} \rightarrow 0$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Deforme olmuş bir cismin tüm noktalarındaki yer değiştirmeler cismin boyunun normali yönündeki düzlem üzerinde ise, düzlemsel birim deformasyon meydana gelir. Bu düzlemsel birim deformasyona kaya kütlesi içindeki uzun yatay tüneller iyi bir örnektir.

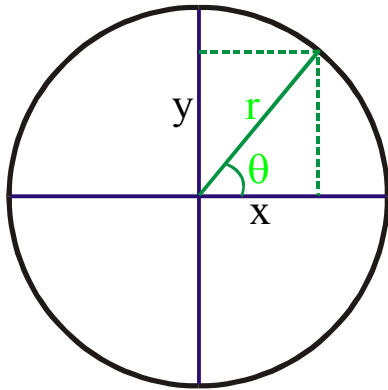
Düzlemsel birim deformasyon için, $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$ & $\varepsilon_z=0$ veya sabittir:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1-\mu)^2 \cdot \sigma_x - \mu(1+\mu) \cdot \sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1-\mu^2) \cdot \sigma_y - \mu(1+\mu) \cdot \sigma_x]$$

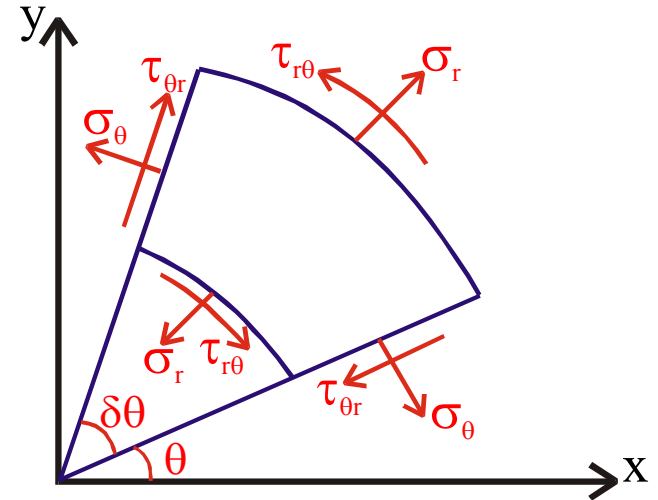
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \cdot \tau_{xy}$$

Kutupsal koordinatlar için gerilim bileşenleri:



$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$



Kutupsal koordinatta gerilim- birim deformasyon ilişkisi:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \cdot \sigma_\theta)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \cdot \sigma_r)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \cdot \tau_{r\theta}$$