

# BÖLÜM 5

# KUVVET SİSTEMLERİ

ve

# MOMENT

# BÖLÜM 5. KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT

Bir eksen çevresindeki kuvvetin Momenti (cisimdeki bir nokta), uygulanan kuvvetin bu eksen çevresinde cismi çevirme (döndürme) ölçüsüdür.

Momentin şiddeti aşağıdaki eşitlik ile belirlenir:

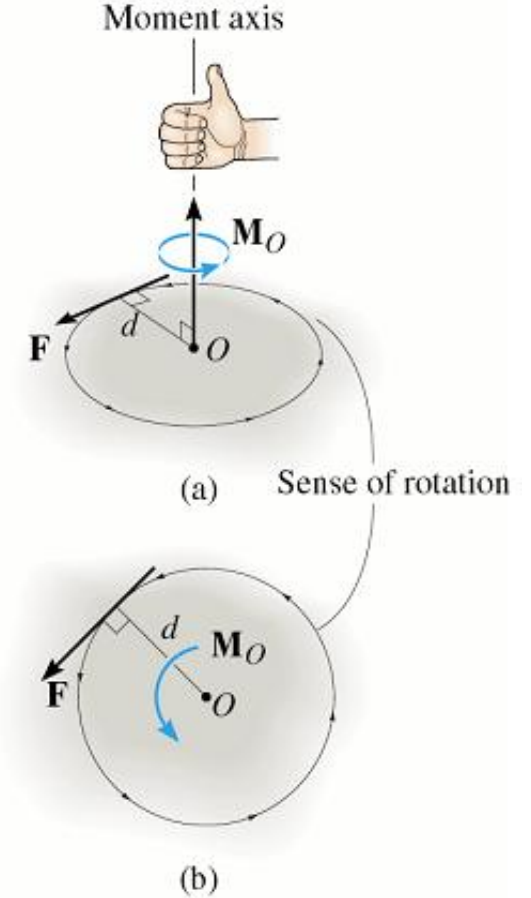
$$M_o = F \times d$$

$M_o$  : Moment

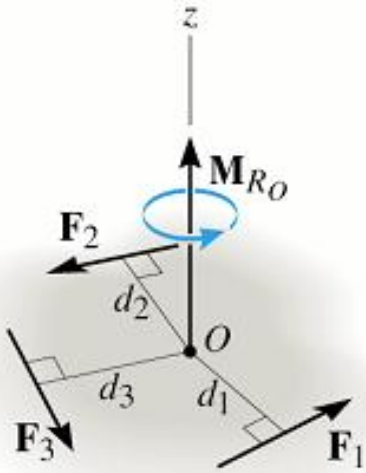
$F$  : Kuvvet

$d$  : Dönme eksenine veya noktasına olan  
Dik uzaklık (Kuvvet kolu)

Rotasyonun yönü sağ el kuralı ile belirlenir.

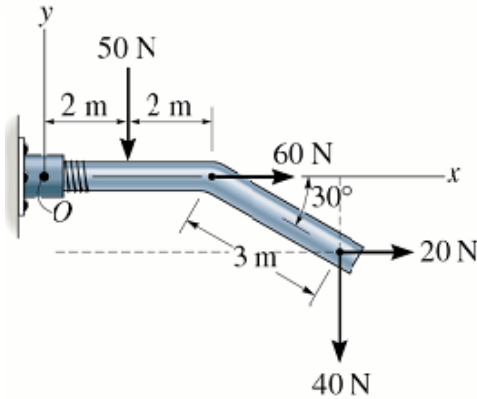


# BÖLÜM 5. KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT



O noktasına etki eden  $F_1$ ,  $F_2$  ve  $F_3$  kuvvet sistemi için moment toplamları (Saat yönü tersi + alınırsa):

$$\Sigma F_x d = M_{R_O}$$

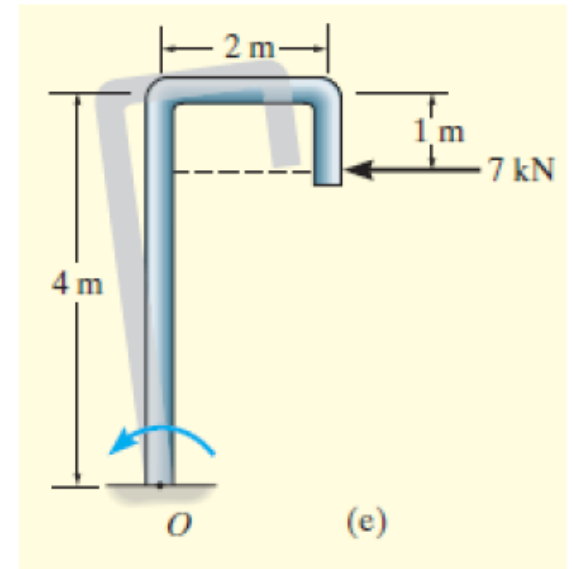
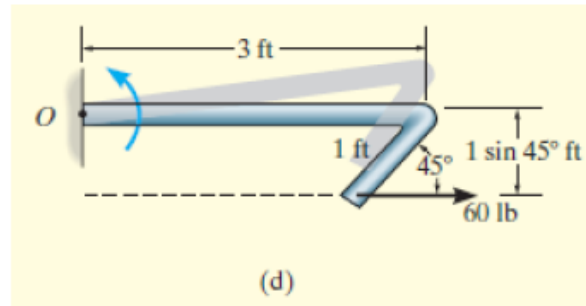
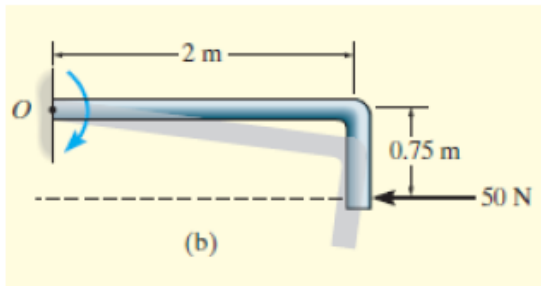
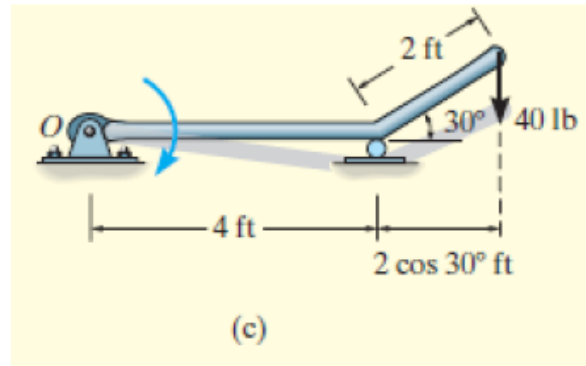
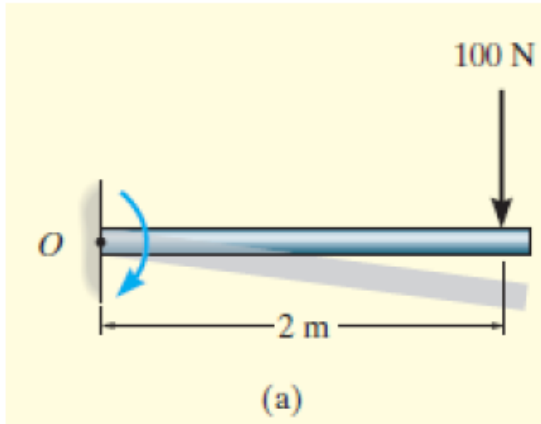


Örnek : O noktasına etki eden  $F_1$ ,  $F_2$  ve  $F_3$  kuvvet sistemi için moment toplamını belirleyelim.

$$M_{r_o} = -50N \times (2m) + 60N \times (0) + 20N \times (3 \cdot \sin 30^\circ m) - 40N \times (4m + 3 \cdot \cos 30^\circ m) = -334Nm$$

# BÖLÜM 5. KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT

Örnek : Kuvvetler ve O noktasına olan uzaklıklara göre momentleri hesaplayalım.



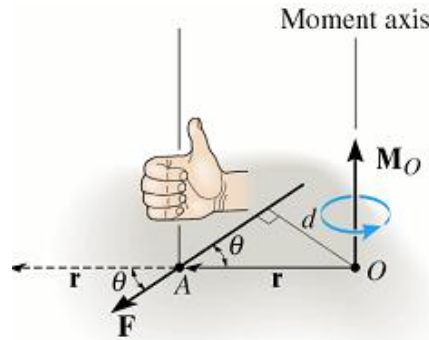
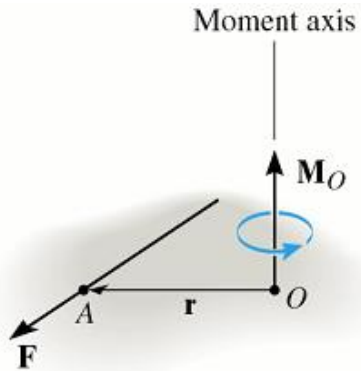
- a) 200 N.m
- b) 37.5 N.m
- c) 229 lb.ft
- d) 42.4 lb.ft
- e) 21.0 lb.ft

# BÖLÜM 5. KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT

O noktası etrafında F kuvvetinin momenti;

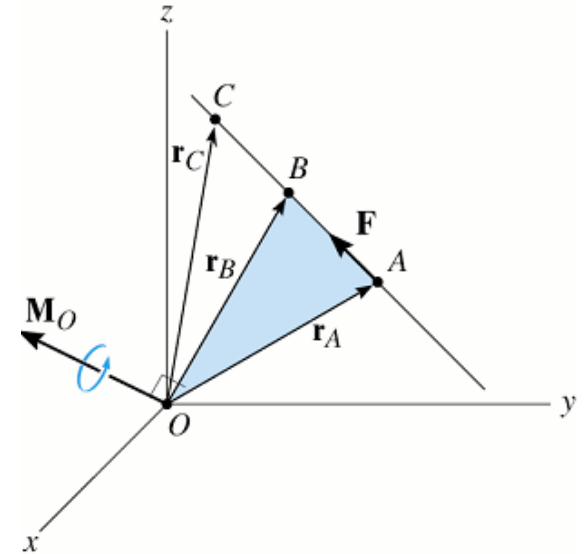
$$M_o = F \times r$$

r : Kuvvetin tesir çizgisi üzerinde herhangi bir noktada kuvvet ile O noktası arasındaki konum vektörü



*Note:*

$$r \sin \theta = d \text{ for any } d, \theta$$

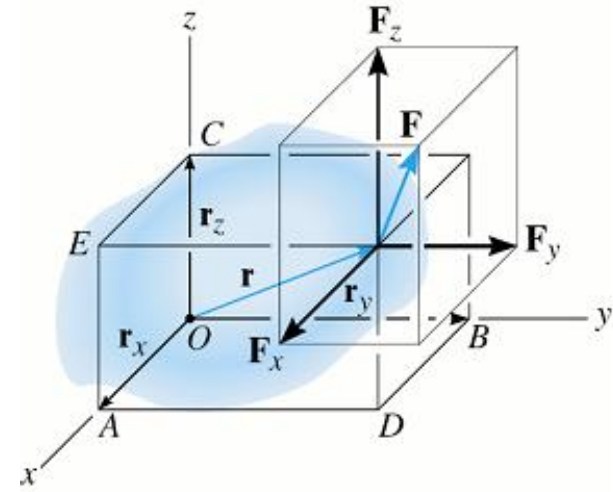


# BÖLÜM 5. DÜZLEMSEL KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT

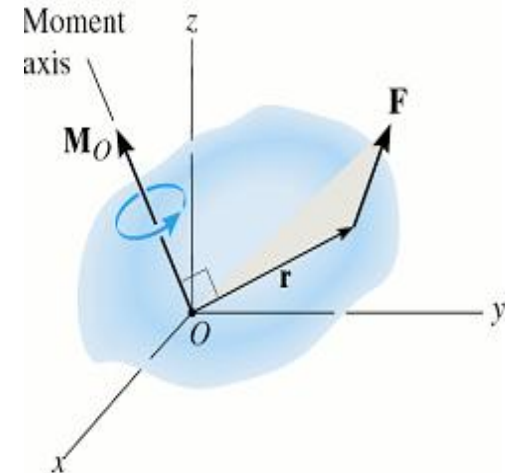
$$\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}$$

$$\bar{r} = r_x \bar{i} + r_y \bar{j} + r_z \bar{k}$$

$$M_o = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



Moment eksenini **F** ve **r** vektörlerini içeren düzleme diktir. Eksen merkezi O noktasından geçmektedir



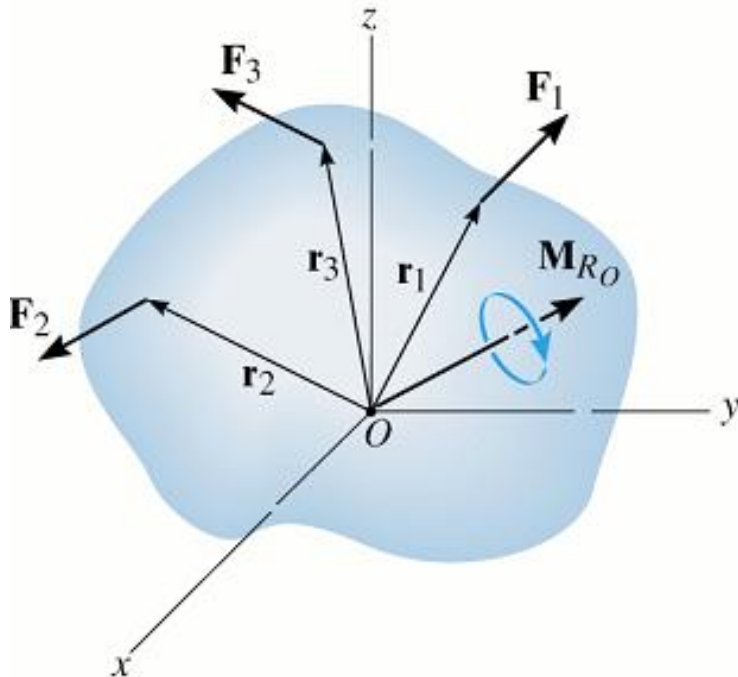
# BÖLÜM 5. CİSİM KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT

Cisme O noktası etrafında etkiyen kuvvet sistemlerinin net momenti “Her bir kuvvet ve uzaklık vektörlerinin momentleri toplamı olacaktır.”

$$\mathbf{M}_{R0} = \mathbf{F} \times \mathbf{r}$$

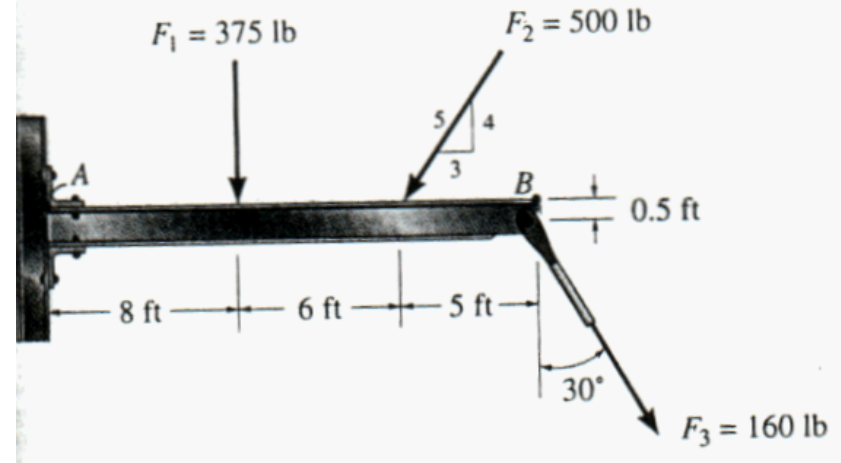
Kartezyen koordinatlarda x, y ve z yönlerinde net moment :

$$\mathbf{M}_{R0} = \Sigma m_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$$



# BÖLÜM 5. KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT

Örnek : Bir kirişe etkiyen kuvvetler aşağıdaki şekilde verilmiştir. B noktası etrafındaki toplam momenti hesaplayınız.



$$\text{CCW} + M_{RB} = \sum M_B ;$$

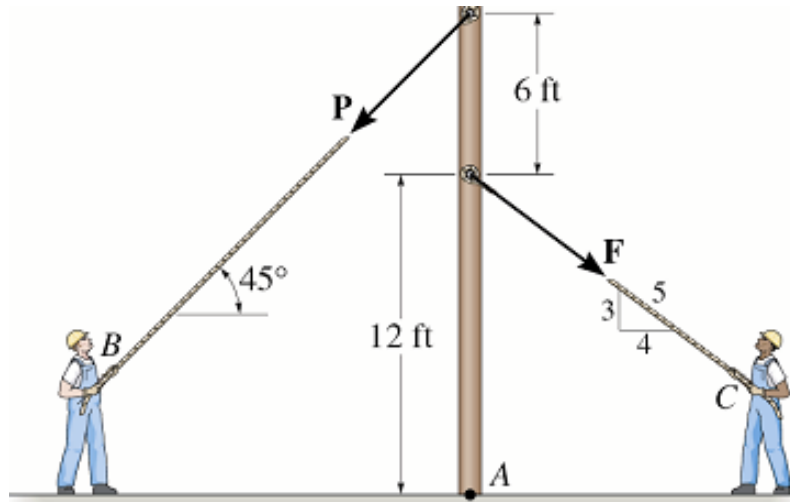
$$M_{RB} = 375 (11) + \frac{4}{5} (500) (5) + \frac{3}{5} (500) (0) \\ + 160 \cos 30^\circ (0) + 160 \sin 30^\circ (0.5)$$

$$M_{RB} = 6165 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$



# BÖLÜM 5. KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT

Örnek : B şahsı direğe bağlı halatı  $P = 30$  lb (pound) ile çekmektedir. Direğin A noktası etrafında herhangi bir yöne devrilmemesi için C şahsının uygulaması gereken F kuvvetinin şiddeti kaç lb olmalıdır?



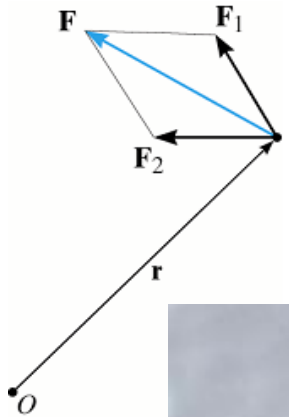
Saat yönü tersi (+) alınırsa,

$$30 \times (\cos 45^\circ) \times 18 = F \left(\frac{4}{5}\right) \times 12 \implies F = 39.8 \text{ lb}$$

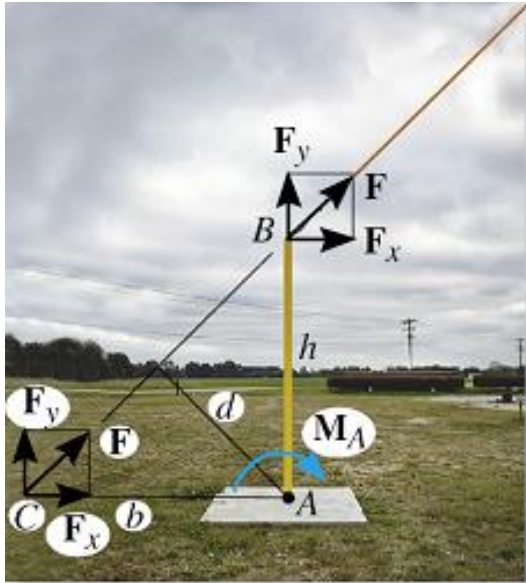
# BÖLÜM 5. VARIGNON TEOREMİ

## VARIGNON TEOREMİ

Fransız matematikçi Pierre Varignon tarafından 1687 yılında “*Projet d' une nouvelle mécanique*” isimli eserde yayınlanmıştır. Bir Bileşke Kuvvetin Momenti, Aynı Noktada Etkiyen Kuvvet Bileşenlerinin Momentleri Toplamına Eşittir.



$$\bar{M}_0 = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{r} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \bar{r} \times \bar{F}_1 + \bar{r} \times \bar{F}_2$$



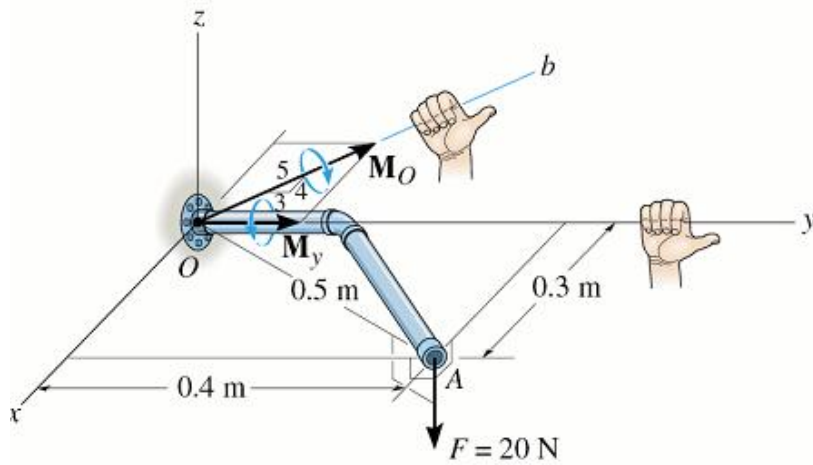
Gerilmiş kablo direği hareket etmeyecek şekilde tutuyorsa A noktasındaki moment:

$$M_A = F_x h = F_y b = I F d \text{ olmalıdır.}$$

**Not :** F, iletimlilik yasasına göre konumlandırılmıştır

# BÖLÜM 5. FARKLI EKSENLERDE MOMENT

Aynı noktada farklı eksenlerdeki momenti belirlemek için skaler veya vektörel analiz yapılabilir

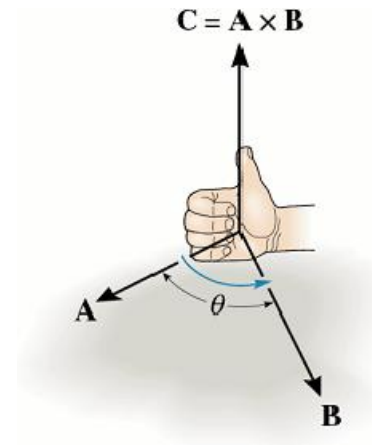


$F=20$  N. Tipik olarak b-ekseni için momenti düşünelim. Aynı şekilde y-eksenindeki momenti hesaplayalım?

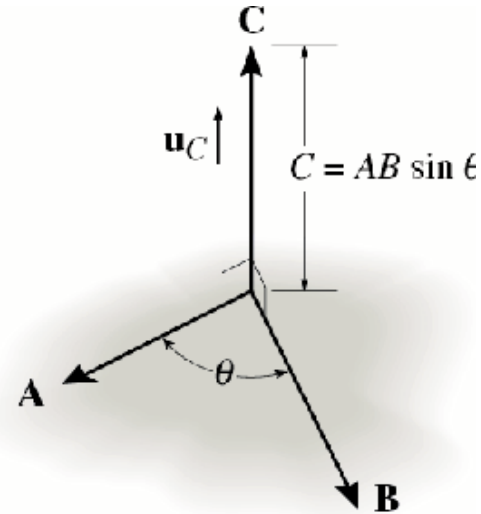
$$M_O = F \times r \text{ (eksen } r \text{ ve } F' \text{e dik)}$$

# BÖLÜM 5. FARKLI EKSENLERDE MOMENT (HATIRLATMA)

## VEKTÖR ÇARPIMINDA SAĞ EL KURALI



$$\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B}$$



Şiddet

$$C = A B \sin\theta$$

Yön

**C , A ve B 'ye DİK**

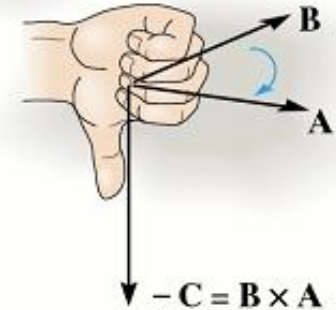
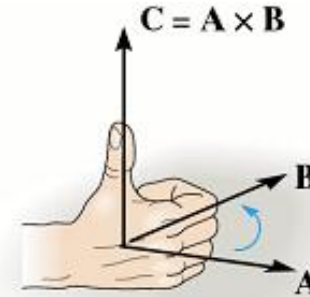
# BÖLÜM 5. FARKLI EKSENLERDE MOMENT (HATIRLATMA)

## Çarpım Komütatif değildir

(Farklı yönlerin çarpımı eşit değildir)

$$\bar{A} \times \bar{B} \neq \bar{B} \times \bar{A}$$

$$\bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times \bar{A}$$



## Skaler Çarpım

$$\alpha(\bar{A} \times \bar{B}) = (\alpha\bar{A}) \times \bar{B} = \bar{A} \times (\alpha\bar{B}) = (\bar{A} \times \bar{B})\alpha$$

## Çarpım Distribütiftir (Dağılım)

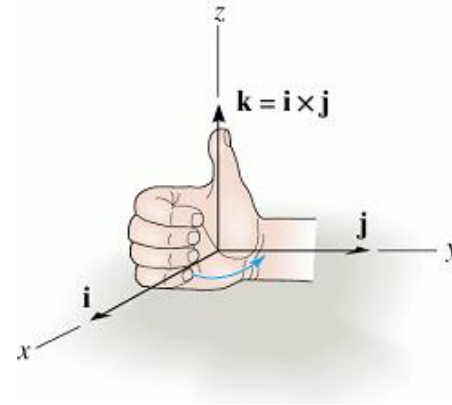
$$\bar{A} \times (\bar{B} + \bar{D}) = \bar{A} \times \bar{B} + \bar{A} \times \bar{D}$$

# BÖLÜM 5. FARKLI EKSENLERDE MOMENT (HATIRLATMA)

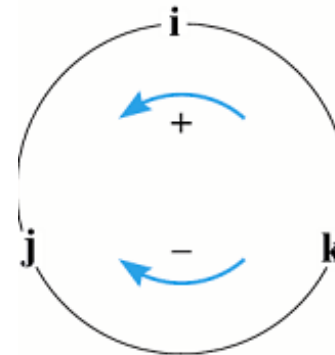
$i \times j$  çarpımında;

Şiddet :  $(i)(j)(\sin\theta)$   $\iff$

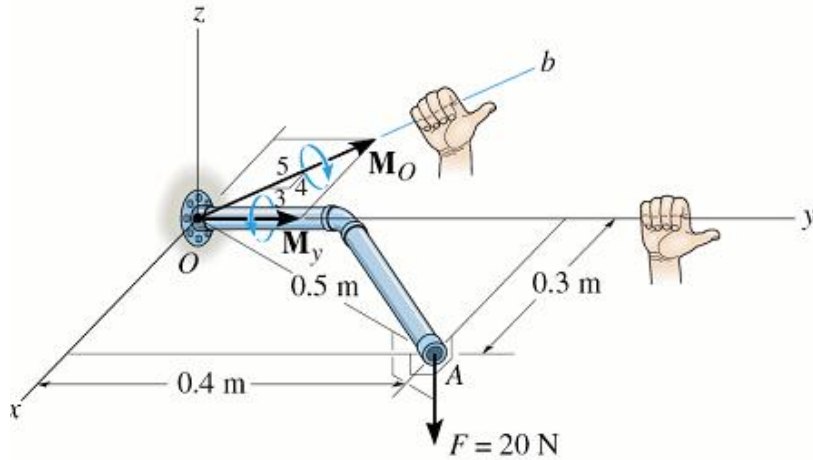
Doğrultu (Yön) :  $k = i \times j$



$$\begin{aligned} i \times j &= k & i \times k &= -j & i \times i &= 0 \\ j \times k &= i & j \times i &= -k & j \times j &= 0 \\ k \times i &= j & k \times j &= -i & k \times k &= 0 \end{aligned}$$

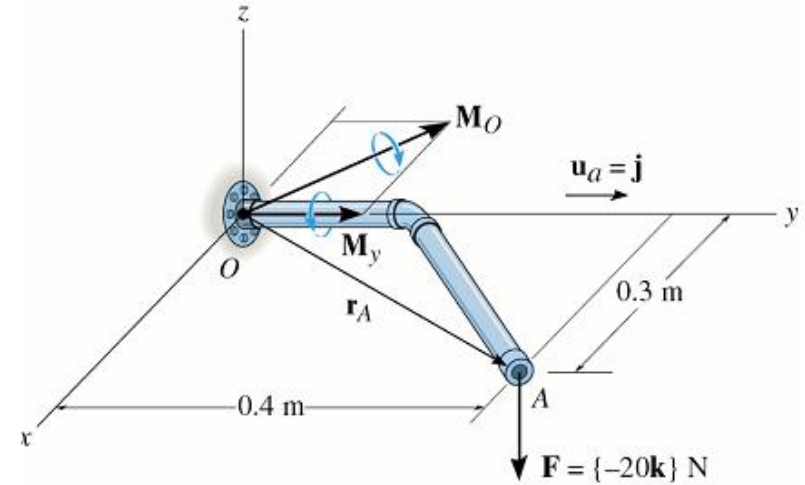


# BÖLÜM 5. FARKLI EKSENLERDE MOMENT



## 1. Aşama

$$\begin{aligned} M_O &= r_A \times F = (0.3i + 0.4j) \times (-20k) \\ &= (-8i + 6j) \text{ Nm} \end{aligned}$$

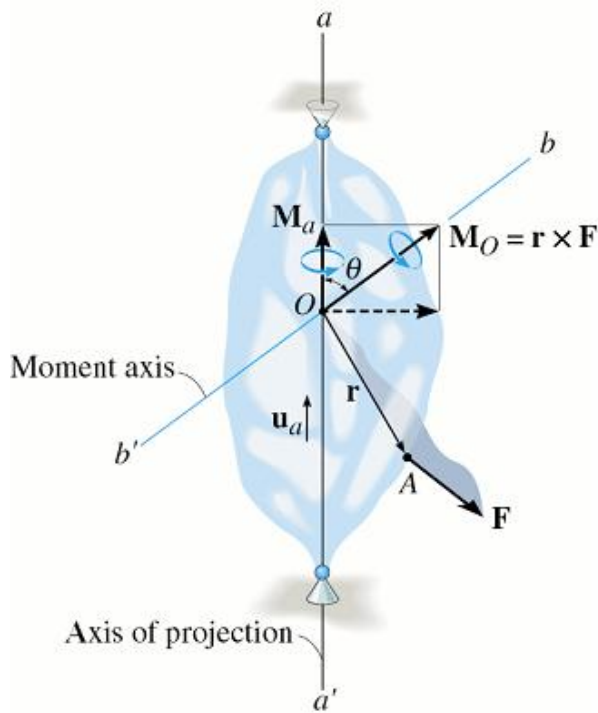


## 2. Aşama

$$M_y = M_O \times u_a = (-8i + 6j) \times (j) = 6 \text{ Nm}$$

# BÖLÜM 5. FARKLI EKSENLERDE MOMENT

Cisme herhangi bir noktada etkiyen kuvveti ele alırsak; bir önceki örnekteki aşamalar skaler üç eksende bir moment oluşturur. Cisimdeki nokta komütatif (yönlere göre sabit) olduğundan,



If  $M_o = \bar{r} \times \bar{F}$  and  $M_a = \hat{u}_a \cdot M_o$  then

$$M_a = \hat{u}_a \cdot (\bar{r} \times \bar{F})$$

$$= (u_{a_x} i + u_{a_y} j + u_{a_z} k) \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

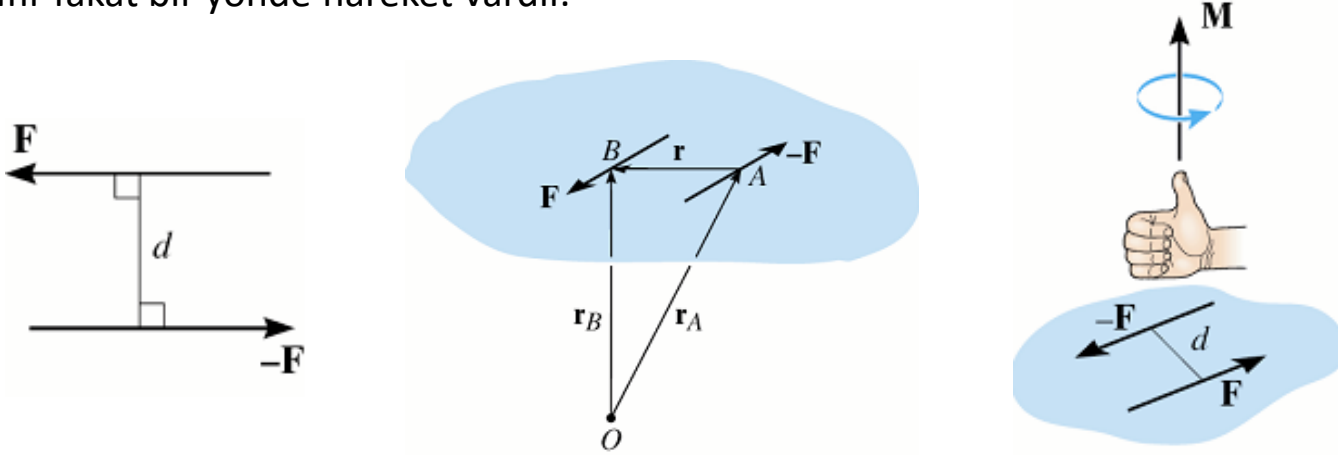
$$= \begin{vmatrix} u_{a_x} & u_{a_y} & u_{a_z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



# BÖLÜM 5. KUVVET ÇİFTLERİNİN MOMENTİ

**Kuvvet çifti;** birbirlerine paralel doğrultuda, aynı şiddete sahip ve zıt yönlerde etkiyen kuvvetlerdir.

Net kuvvet sıfır fakat bir yönde hareket vardır.



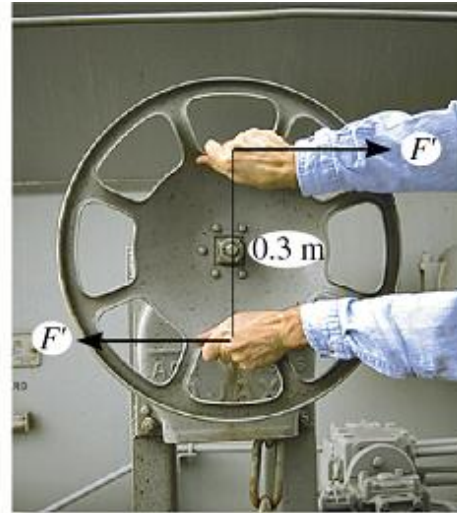
**Moment çiftleri;** aynı noktadaki momentler toplamıdır.

O noktasında moment;

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

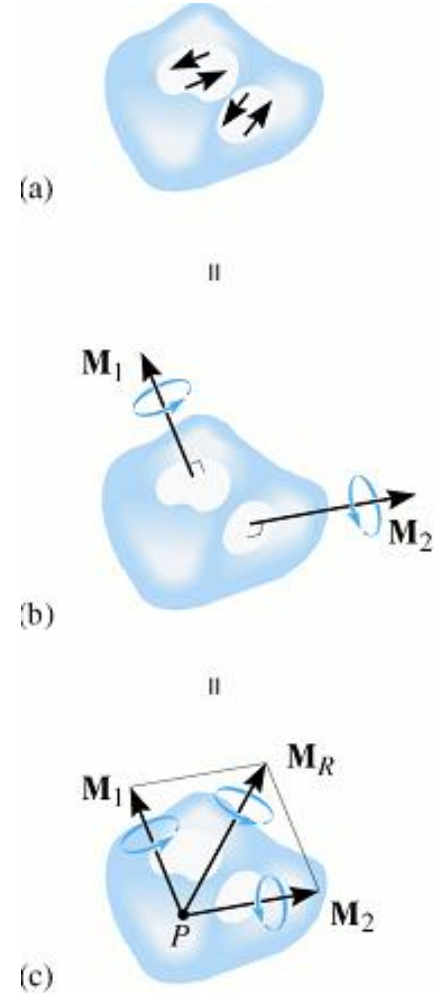
# BÖLÜM 5. EŞDEĞERKUVVET ÇİFTLERİNİN MOMENTİ

**Eşdeğer kuvvet çiftleri;** aynı momenti yaratan kuvvet çiftleridir. Kuvvetler aynı veya birbirine paralel düzlemlerde etkimelidir. Eşdeğer momentleri oluşturan kuvvetler serbest vektörler olup, cismin herhangi bir noktasında eklenebilirler.



Momentleri  $M_1$  ve  $M_2$  olan eşdeğer kuvvetler için:

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



# BÖLÜM 5. EŞDEĞERKUVVET ÇİFTLERİNİN MOMENTİ

Örnek : Aşağıdaki ahşap çerçeveye iki moment çifti etki etmektedir.  $d = 6$  ft ise, bileşke momenti hesaplayalım.

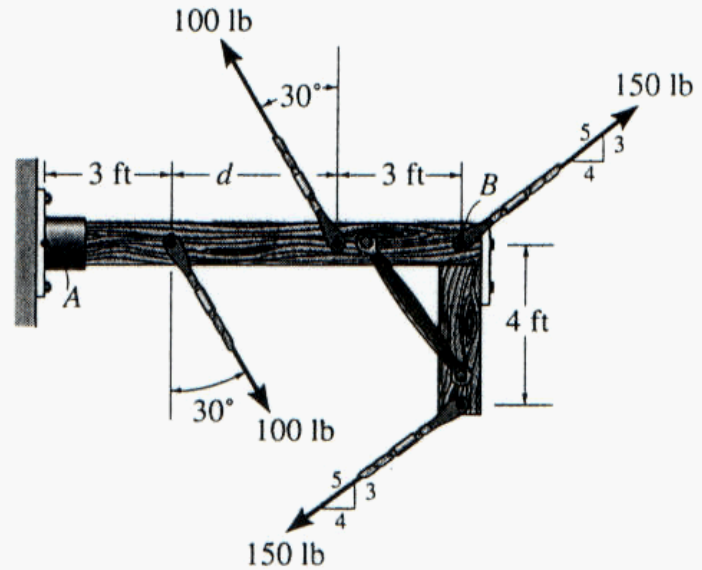
- Tüm kuvvetleri x ve y bileşenlerine ayırıp ayrı ayrı momentleri belirleyelim.
- A noktası etrafında kuvvetlerin bileşkelerine göre momentleri hesaplayarak toplamı belirleyelim

(a)

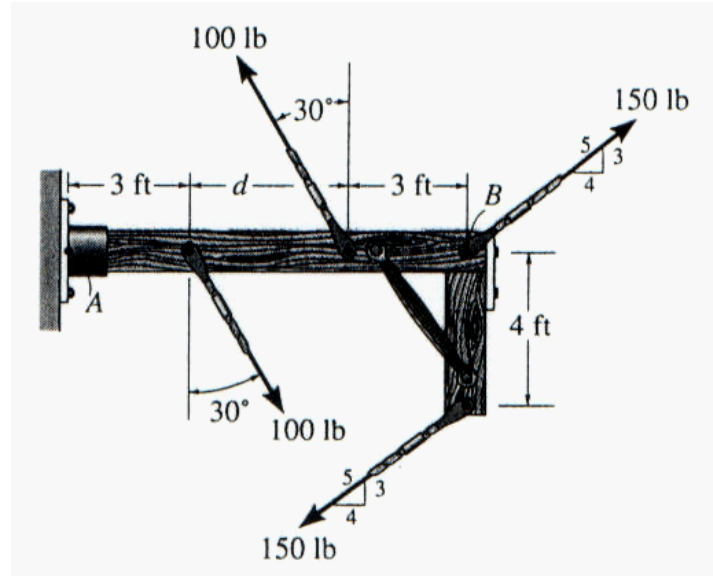
$$M_1 = 100 \cos 30^\circ (6) \\ = 519.6 \text{ lb} \cdot \text{ft CW}$$

$$M_2 = \frac{4}{5} (150)(4) = 480 \text{ lb} \cdot \text{ft CCW}$$

$$M_R = M_1 - M_2 = 519.6 - 480 \\ = \boxed{39.6 \text{ lb} \cdot \text{ft CW}}$$



# BÖLÜM 5. EŞDEĞERKUVVET ÇİFTLERİNİN MOMENTİ



(b)

$$CCW + M_R = \sum M_B;$$

$$M_R = 100 \cos 30^\circ (3) + \frac{4}{5} (150)(4) - 100 \cos 30^\circ (9)$$

$$M_R = -39.6 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

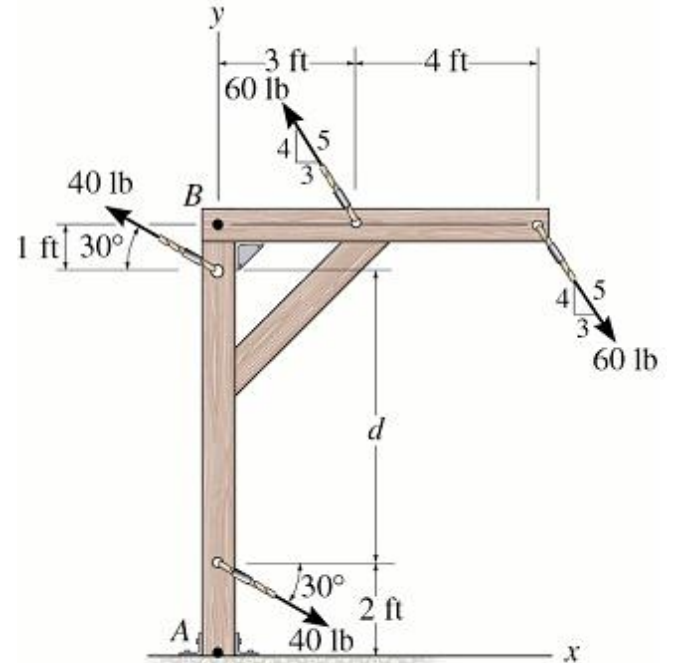
$$= \boxed{39.6 \text{ lb} \cdot \text{ft CW}}$$

# BÖLÜM 5. EŞDEĞERKUVVET ÇİFTLERİNİN MOMENTİ

Örnek : Moment çiftlerini dikkate alarak toplam momenti a. direkt, b. A noktasına göre x ve y bileşkeleri ile belirleyelim (d = 4ft)

$$M_c = 40 \cos 30(4) - 60\left(\frac{4}{5}\right)(4) \\ = -53.4 \text{ lb.ft (CW)}$$

$$M_c = -40 \cos 30(2) + 40 \cos 30(6) \\ + 60\left(\frac{4}{5}\right)(3) + 60\left(\frac{3}{5}\right)(7) - 60\left(\frac{4}{5}\right)(7) - 60\left(\frac{3}{5}\right)(7) \\ = -53.4 \text{ lb.ft (CW)}$$



## Bölüm 5. Kısa Notlar

- Moment; kuvvetin bir eksen etrafında veya cismin uygulanan noktasında oluşturduğu çevirme hareketinin ölçüsüdür.*
- Moment şiddeti, kuvvetin şiddeti ile ilgili noktaya olan dik uzaklığının çarpımı kadardır.*
- Varignon Teoremi; bileşke kuvvetin momenti, aynı noktada etkiyen kuvvet bileşenlerinin momentleri toplamı olarak tanımlanmıştır.*
- Kuvvet vektörlerinin çarpımında sağ el kuralı*
- Kuvvet ve moment çiftleri. Cismin hareketsiz kalması için toplam momentin noktasal ve düzlemsel koordinatlarda sıfır olması.*
- Eşdeğer kuvvet çiftleri ve momentleri*