

OPTİMİZASYON TEKNİKLERİNE GİRİŞ:

Hazırlayan: Doç. Dr. Şebnem Arslan

1. Giriş

Optimizasyon, matematiksel olarak tanımlanabilen bir problemi çözebilmek için en iyi kararı verme sanatıdır. Bir optimizasyon probleminde amaç, bir fonksiyonu minimize veya maksimize etmektir. Bu fonksiyon (amaç fonksiyonu) karar değerlerini belirleyen değişkenlere bağlıdır. Bu değişkenlerin değerleri ise bazı kısıtlamalara uyacak şekilde sınırlanmıştır. Matematiksel olarak ifade edilecek olursa, problem aşağıdaki şekilde gösterilir:

Optimize et (Maksimize veya minimize et) $Z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_3(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right\} \geq \text{veya} \leq \text{veya} = \left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right\}$$

Yukarıdaki denklemde n değişken sayısını, m kısıtlayıcı sayısını, Z ise amaç fonksiyonunu göstermektedir.

Problemde $Z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ile sistem performans ölçütü ifade edilmiş, karar değişkenleri $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 'in bu ölçütü maksimize veya minimize edecek değerlerinin bulunması hedeflenmiştir. Sistem özelliklerini kısıtlayıcılar $[g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2, \dots]$ belirlemektedir.

Amaç fonksiyonu bir madeni işletme maliyetini minimize edecek, karı maksimize edecek veya enerji kullanımını minimize edecek şekilde bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. Öte yandan, kısıtlayıcı fonksiyonlar bir işte çalıştırabilecek toplam işçi sayısı, bu işçilerin kaç saat çalıştırılacağı, bir makinenin o makine için ayrılmış olan alan içinde kalacak şekilde boyutlarının belirlenmesi veya bir yapının hasara uğramadan üzerine gelen yükleri taşıyabilecek şekilde tasarlanması olarak tanımlanabilir.

Optimizasyon problemi çözerken öncelikle karar (tasarım) değişkenini tanımlamak, amaç fonksiyonunu kurmak ve kısıtlayıcı fonksiyonları belirlemek gerekmektedir. Daha sonra uygun metod seçilerek problem çözülmelidir.

2. Optimizasyon problemlerinin sınıflandırması

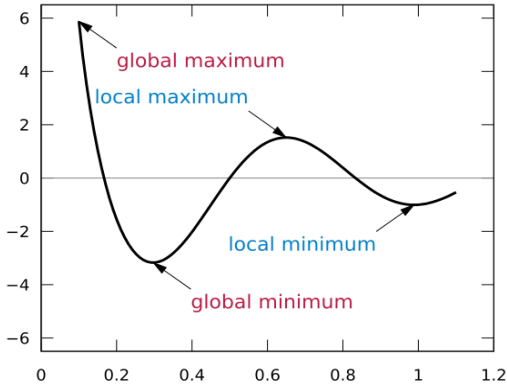
Optimizasyon problemleri Tablo 1'deki şekilde sınıflandırılırlar. Lineer probleme bir örnek vermek gerekirse $Z = 3x_1 + 5x_2 + 8x_3$, doğrusal olmayan probleme örnek olarak $Z = 3x_1 * x_2^3$ fonksiyonu verilebilir.

Tablo 1. Optimizasyon problemlerinin sınıflandırması

Karakteristik	Özellik	Sınıflandırma
Tasarım değişkenlerin sayısı	1	Tek değişkenli
	1'den fazla	Çok değişkenli
Problem formülasyonu	Kısıtlama var	Sınırlı
	Herhangi bir kısıtlama yok	Sınırsız
Amaç ve kısıtlayıcı fonksiyonlar	Doğrusal fonksiyon	Lineer (Doğrusal)
	Kuadratik fonksiyon	Kuadratik
	Doğrusal olmayan fonksiyon	Doğrusal olmayan
Tasarım değişkenlerinin türü	Tamsayı	Tamsayı
	Sürekli	Sürekli

3. Lineer (doğrusal) olmayan programlama

Doğrusal olmayan bir $f(x)$ fonksiyonunun x^* noktasında bir lokal minimumu vardır diyebilmek için fonksiyonun 0 olmayan ilk türevinde (mesela n 'inci türevinde $-n$ çift sayı olmalı) $f^n(x^*)$ pozitif olmalıdır. Lokal maksimum için ise $f^n(x^*)$ negatif olmalıdır. Herhangi bir doğrusal olmayan fonksiyonun bir aralıkta $[a, b]$ global maksimum veya minimum değerini bulmak için öncelikle fonksiyonun türevi alınır ve 0'a eşitlenir, sabit noktalar bulunur. Daha sonra, a ve b 'yi de içine alacak şekilde tüm sabit noktaları lokal optimum olarak değerlendirmek gerekir. Bunun için ikinci türeve bakılır. Eğer ikinci türev sabit noktada 0'dan küçükse o nokta global maksimum, büyük ise o nokta global minimum olarak adlandırılır.



Şekil 1. $\cos(3\pi x)/x$ fonksiyonunun $0.1 \leq x \leq 1.1$ aralığında minimum ve maksimum değerlerini gösteren şekil (Kaynak wikipedia.org).

4. Optimum Arama Yöntemleri

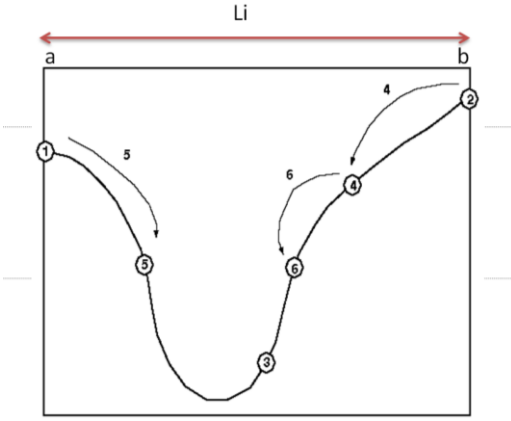
Bazen hesap yaparak bir fonksiyonun optimum değerini belirlemek mümkün olmaz. Eğer amaç fonksiyonu analitik olarak tanımlanamıyorsa, türev almak imkansız ise veya cebir ile sabit noktalar elde edilemediyse bazı arama yöntemleri ile lokal optima izin verilebilir bir hata payı ile yaklaşık olarak bulunabilir.

Amaç fonksiyonun belirli bir aralıkta tek bir optimuma sahip olduğunu varsayarsak (yani fonksiyon unimodal) sistematik olarak optimum aranan aralığı azaltarak kabul edilebilir limitlere göre optimum bulunabilir (Şekil 2).

Eleme teknikleri Bölge Eleme Yöntemi, Fibonacci araması ve üç nokta aralık araması gibi farklı yöntemlerle uygulanabilir. Burada sadece Bölge Eleme Yöntemi irdelenecektir.

4.1. Bölge Eleme Yöntemi

Bu teknik $(\sqrt{5} - 1)/2=0.618$ sayısına dayanır. Bizim araştırma yapacağımız aralıkta $[a, b]$ ilk iki nokta iki uçtan $0.618*(b-a)$ uzaklıkta olacaktır. Yani arama yapılan aralığa L_i dersek, her seferinde belirlenen uç noktadan $0.618L_i$ uzaklıkta noktalarda arama yapılacaktır (Şekil 2). Örneğin bir akiferin en derin kısmını bulmak için yapılan çalışmalarda böyle bir yöntem kullanmak yerine rastgele sondaj açılırsa daha fazla para ve zaman gider.



Şekil 2. Bir akiferin en derin yerini bulmak için Bölge Eleme Yönteminin (Golden Section Search) kullanılması (Kaynak: <http://www2.geog.ucl.ac.uk/~plewis/invert/nonlinear.htm>)

OPTİMİZASYON TEKNİKLERİNE GİRİŞ:

Hazırlayan: Doç. Dr. Şebnem Arslan

5. Lineer Programlama (LP)

Lineer programlama modellerinin temeli doğrusal eşitliklerin çözümüne dayanmaktadır. Lineer programlama bir çeşit optimizasyon problemidir. Bu problemde sistemin kısıtlayıcıları lineer denklemler veya eşitsizliklerle ifade edilir. Bunun yanı sıra, amaç fonksiyonu karar değişkenlerinin bir lineer fonksiyonudur. Optimizasyon metodları arasında en yaygın kullanılanıdır. Bunun nedeni, büyük ölçekli problemlerin çözümü için piyasada geliştirilmiş bir çok yazılım olması ve hassasiyet analizlerinin uygulanmasındaki kolaylıktır.

Bir optimizasyon probleminin lineer programla ile çözümünde izlenecek yol şöyledir:

- 1) Problem formüle edilmelidir. (Sözle ifade edilmiş problem LP modeline dönüştürülmelidir.)
- 2) Karar değişkenleri belirlenmelidir.
- 3) Kısıtlayıcılar lineer denklemler veya eşitsizliklerle ifade edilmelidir.
- 4) Amaç fonksiyonu maksimize veya minimize edilecek şekilde bir lineer fonksiyon haline getirilmelidir.

LP problemlerinin çözümünde grafik metodu kullanılabilir.

Örnek:

$$\text{Min } Z=7X_1 + 8X_2$$

$$\text{Kısıtlayıcılar: } -X_1+X_2 \leq 3$$

$$6X_1+3X_2 \geq 24$$

$$2X_1+3X_2 \geq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

5.1. Jeoloji Mühendislerine yönelik bir lineer programlama uygulaması

Bir şirket iki farklı madene sahiptir (A ve B). Bu madenlerde öğütüldükten sonra üç farklı sınıfa ayrılan bir cevher bulunmakta. Bu sınıflar yüksek, orta ve düşük tenörlü cevher olarak tanımlanmıştır. Her bir tenördeki cevhere belli bir talep vardır. Şirket bir maden eritme fabrikası ile anlaşma yapmıştır, fabrikaya 1 haftada 12 ton yüksek, 8 ton orta, 24 ton düşük tenörlü cevher sağlayacaktır. A madenin operasyon maliyeti günde 200 dolar, B Madenin ise günde 160 dolardır. Her iki madeninde kapasiteleri farklıdır. A madeni günde sırasıyla 6, 2 ve 4 ton yüksek, orta ve düşük tenörlü cevher üretebiliyor. B madeni ise her üç madenden günde 2, 2 ve 12 ton üretebiliyor. Operasyon maliyetini minimize etmek için her iki madenin haftanın kaç günü çalıştırılması gerektiğini LP ile saptayınız.

Katkı belirtme: Bu notlar hazırlanırken Prof. Dr. Hasan Yazıcıgil tarafından 1996 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Jeoloji Mühendisliği Bölümü “Geological Engineering Design” ders notlarından yararlanılmıştır.